Junio 2001:

PROBLEMA 4. Se divide un alambre de 100 m. de longitud en dos segmentos de longitudes x y 100 – x. Con el de longitud x se forma un triángulo equilatero y con el otro segmento se forma un cuadrado. Sea f(x) la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado.

a) Determinar el dominio de la función f, es decir los valores que puede tomar x.

b) Con el estudio de la derivada de f obtener cuándo f es creciente y cuándo es decreciente.

c) Indicar razonadamente para qué valor de x se obtiene que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado es mínima.

PROBLEMA 1. Sea f la función definida por $\begin{cases} f(x) = 4 & \text{si} \quad -3 \le x \le 3 \\ f(x) = 7 - x & \text{si} \quad 3 < x \le 7 \end{cases}$

Justificar si f es o no derivable en x = 3. ¿Cuál es el significado geométrico del resultado obtenido?

Septiembre 2001:

PROBLEMA 2. Obtener el área de la superficie S limitada por el eje OX, la curva $y = x^2$, con $0 \le x \le 2$, y la recta $x = 2$.

Calcular el volumen generado por la superficie S al dar una vuelta completa alrededor del eje OX.

PROBLEMA 3. Descomponer un segmento de longitud 200 m. en cuatro partes de manera que esas partes sean los lados de un rectángulo cuya área sea la máxima dentro de la familia de rectángulos de perímetro 200.

Junio 2002:

PROBLEMA 4. Hallar el valor positivo de a para que $\int_0^{a-1}(x+1)dx = 9/2$. (2 puntos). Obtener, razonadamente, la integral que da el área de la superficie comprendida entre el eje 0X, la curva $y=x+1$ y las rectas $x=0$ y $x=2$. (1,3 puntos).

PROBLEMA 3. Considerar las funciones definidas para $x \ge 0$, $f(x)=\text{arcsen}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ y $g(x) = \text{arccos}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Calcular $f'(x)$ y $g'(x)$ y expresarlas del modo más simplificado posible. (2 puntos). Comparar los resultados y deducir justificadamente la diferencia entre $f(x)$ y $g(x)$. (1,3 puntos).

Septiembre 2002:

PROBLEMA 4. Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Hallar a, b, c sabiendo que f alcanza un máximo en x=–4 y un mínimo en $x=0$ y que $f(1)=1$.

PROBLEMA 4. Calcular, razonadamente, el área de la región limitada por las curvas $y=x^2$ e $y=\dfrac{2}{1+x^2}$.

Junio 2003:

PROBLEMA 2. a) Dibujar la recta de ecuación $y=(2/\pi)x$ y la curva de ecuación $y=senx$ cuando $-\pi/2 \le x \le \pi/2$; obtener razonadamente por cálculo integral el área limitada entre la recta y la curva *(1,6 puntos).*

b) Calcular la integral del producto de las dos funciones consideradas en el apartado anterior, es decir $\int (2/\pi)\,x\,senx\,dx$, indicando los pasos realizados *(1,7 puntos)*.

© Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

PROBLEMA 2. Sea T un triángulo de perímetro 60 cm. Uno de los lados del triángulo T mide x cm y los otros dos lados tienen la misma longitud.
a) Deducir razonadamente las expresiones de las funciones A y f tales que:

$$A(x) = \text{Área del triángulo } T.$$
$$f(x) = \{A(x)\}^2 \quad (1{,}3 \text{ puntos}).$$

Indicar además entre qué valores puede variar x.
b) Obtener, razonadamente, el valor de x para el que $f(x)$ alcanza el valor máximo (*2 puntos*).

Septiembre 2003:

PROBLEMA 2. En una gran pradera se tiene que vallar una zona de 400 m^2, que debe tener forma de rectángulo. Cada metro de valla cuesta 100 euros. Si x es la medida en metros de uno de sus lados, se pide:
a) Obtener razonadamente la función f tal que $f(x)$ sea el coste de la valla, indicando entre qué valores puede variar x (*1,3 puntos*).
b) Deducir razonadamente el valor de x para el que la función $f(x)$ alcanza el valor mínimo (*2 puntos*).

PROBLEMA 2
a) Representeu la superfície S limitada entre l'eix OX i la corba $y = x^2 - 4$, quan $-2 \le x \le 2$. Indiqueu raonadament, mitjançant una integral, l'àrea de la superfície S (1,6 punts).
b) Calculeu el volum del cos generat en donar un gir complet al voltant de l'eix OX la superfície S considerada en l'apartat anterior, i indiqueu com heu obtingut el volum (1,7 punts).

Junio 2004:

PROBLEMA 3. Encontrar razonadamente el punto de la curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ en el que la recta tangente a la curva tiene pendiente máxima y calcular el valor de esta pendiente (*3,3 puntos*).

PROBLEMA 4.1. En un plano, el trazado de una carretera discurre según la ecuación $y = \dfrac{x^2}{4} - x$, siendo un río el eje OX. En el terreno entre el río y la carretera hay un pinar. Si expresamos las distancias en kilómetros, ¿cuánto vale el pinar si la hectárea se paga a 60 euros?

PROBLEMA 3. Hallar todos los valores reales z tales que $\displaystyle\int_0^z \frac{-16}{x^2 - 2x - 15}\,dx = \ln 25$ (*3,3 puntos*).

PROBLEMA 4.1. Desde un punto N de la orilla del mar, un nadador debe alcanzar una boya que flota a 3 kilómetros de la costa y dista $3\sqrt{5}$ kilómetros del punto N. Si recorriendo la orilla (que se supone recta y plana), su velocidad media es de 5 kilómetros por hora y nadando, de 3 kilómetros por hora, ¿cuánto tiempo deberá caminar hasta lanzarse al mar, para alcanzar la boya en el menor tiempo posible?

Septiembre 2004:

PROBLEMA 3. Sea $f(x) = x^2 + mx$ (donde m es un parámetro real) y $f'(x)$ la función derivada de $f(x)$. Se pide:
a) Hallar el valor del parámetro m para que $f(x)$ tenga un mínimo relativo en $x = -3/4$ (*1,5 puntos*).
b) Para el valor de m calculado en a), determinar el área de la región comprendida entre la curva $y = f(x)$ y la recta de ecuación $y = f'(x)$ (*1,8 puntos*).

PROBLEMA 4.1. a) Se tienen inicialmente 10 bacterias en un cultivo de laboratorio y cada día se duplican. Averigua, razonadamente, el número de bacterias que habrá cuando hayan transcurrido 10 días (*1 punto*).
b) Para otro cultivo, sea $P(t)$ el número de bacterias transcurrido el tiempo t medido en días. Averigua el aumento del número de bacterias al cabo de 10 días, sabiendo que $P(0) = 500$, $P(3) = 1100$ y que la derivada $P'(t)$ es constante para $0 \le t \le 10$ (*2,3 puntos*).

© Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

PROBLEMA 3. a) Obtener razonadamente la siguiente integral $\int \frac{4x+11}{(x+1)^2+1}dx$ (*2,3 puntos*).

b) Aplicando la regla de Barrow, calcular $\int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{4x+11}{(x+1)^2+1}dx$ (*1 punto*).

PROBLEMA 4.1. Determinar razonadamente la longitud del lado del cuadrado de área mínima cuyos vértices están situados sobre los lados de otro cuadrado de lado 16 cm (*3,3 puntos*).

Junio 2005:

PROBLEMA 3. Donades les corbes $y=(x-1)^3$, $y=5-x^2$ calculeu raonadament:
a) El seu punt de tall (*1,1 puntos*). b) L'àrea tancada per aquestes i l'eix OY *(2,2 punts)*.

PROBLEMA 4.1. Proveu que el volum de qualsevol con recte inscrit en una esfera és menor que el 30% del volum d'aquesta (*3,3 punts*).

PROBLEMA 3. Hallar las constantes reales a y b para que $f(x)=\begin{cases} x\ln x+a & si \quad x>0 \\ b & si \quad x=0 \\ \frac{\operatorname{sen}\pi x}{x} & si \quad x<0 \end{cases}$

sea una función continua para todo valor real x (*3,3 puntos*).

PROBLEMA 4.1. La concentración en sangre de un fármaco después de su toma es $C(t)=0{,}29483\,t+0{,}04253\,t^2-0{,}00035\,t^3$ mg/ml, donde t es el tiempo transcurrido en minutos. Se pide:

a) Calcular el periodo de tiempo durante el cual el fármaco actúa (*1,8 puntos*).
b) Determinar en qué instante la concentración del fármaco es máxima (*1,5 puntos*).

Septiembre 2005:

PROBLEMA 3. a) El perímetro de un sector circular de radio R es 4 m. ¿Cuántos radianes α debe medir su ángulo central para que su área sea máxima? (*1,8 puntos*). (Nota: Perímetro = $2R+R\alpha$; Área = $\frac{1}{2}\alpha R^2$).

b) El área de otro sector circular es 1 m^2. ¿Para qué radio es mínimo su perímetro? (*1,5 puntos*).

PROBLEMA 4.1. El caudal de agua (es decir, el volumen por unidad de tiempo) que circula por una tubería cilíndrica es proporcional a la cuarta potencia de su radio. Para abastecer a una población, se han previsto tuberías de cierto radio, pero el fabricante las suministra de un radio que es un 0,5% menor. Estimar en qué porcentaje se reducirá el caudal real respecto del previsto *(3,3 puntos)*.

PROBLEMA 3. En el plano se tiene la curva $y=x^2+2x-1$. Encontrar razonadamente las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto (2, 3) y son tangentes a dicha curva (*3,3 puntos*).

PROBLEMA 4.1. El trazado de dos canales navegables en un mapa discurre según las rectas $y=x$ e $y=-x$. Dos lanchas motoras, A y B, salen al mismo tiempo de puntos situados sobre cada uno de los canales a distancias de 20 y 15 km, respectivamente, del punto P de confluencia de ambos. La lancha A se dirige a P con velocidad de 30 km/h y la lancha B se dirige a ese mismo punto P con velocidad 60 km/h. Se considera despreciable la anchura de los canales y la longitud de las lanchas y se pide calcular:

a) La distancia entre las lanchas en función del tiempo desde que inician su recorrido (*2,3 puntos*).
b) La distancia mínima a la que pueden estar las lanchas (*1 punto*).

© Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Junio 2006:

PROBLEMA 3.

a. **Dibujar razonadamente** la gráfica de la función $g(x) = x^2 - 4$, cuando $-1 \le x \le 4$ **(1,1 puntos).**

b. **Obtener razonadamente** los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x) = |x^2 - 4|$ en el intervalo $[-1, 4]$ **(1,1 puntos).**

c. **Calcular** el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = f(x)$ y las rectas $x = -1$, $x = 4$ e $y = 0$ **(1,1 puntos).**

PROBLEMA 4. Una persona camina a la velocidad constante de $3\,m/s$ alejándose horizontalmente en línea recta desde la base de un farol cuyo foco luminoso está a $10\,m$ de altura. Sabiendo que la persona mide $1{,}70\,m$, **calcular**:

a) **La longitud de la sombra** cuando la persona está a $5\,m$ de la base del farol **(2 puntos).**

b) **La velocidad de crecimiento** de la sombra a los t segundos de comenzar a caminar **(1,3 puntos).**

PROBLEMA 3. Dada la función $f(x) = \ln x$ en el intervalo cerrado $[1, e]$, siendo $e = 2{,}718281....$:

a) **Razonar** que existe un punto P de la gráfica $y = \ln x$ en el que la recta tangente a ella es paralela a la recta que pasa por los puntos $A = (1, 0)$ y $B = (e, 1)$ **(1 punto).**

b) **Obtener** el punto P considerado en **a) (1,8 puntos).**

c) **Calcular la pendiente** de la recta tangente a $y = \ln x$ en ese punto P **(0,5 puntos).**

PROBLEMA 4. El coste del marco de una ventana rectangular es $12{,}5\,€$ por metro lineal de los lados verticales y $8\,€$ por metro lineal de los lados horizontales.

a) **Calcular razonadamente** las dimensiones que debe tener el marco de una ventana de $1\,m^2$ de superficie para que resulte lo más económico posible **(2,3 puntos)**.

b) **Calcular,** además el coste de ese marco más económico posible considerado en **a) (1 punto).**

Septiembre 2006:

PROBLEMA 3. Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 3x + 8$ y $g(x) = -3x$, se pide:

a) **Calcular** el máximo absoluto de la función $f(x)$ en el intervalo $[-3, 0]$ **(1 punto).**

b) **Calcular** el punto de corte de la curva $y = f(x)$ y la recta $y = g(x)$ **(1 punto).**

c) **Obtener** el área del recinto limitado por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = g(x)$, $x = -3$ y $x = 0$ **(1,3 puntos).**

PROBLEMA 4. Un incendio se extiende en forma circular uniformemente. El radio del círculo quemado crece a la velocidad constante de $1{,}8\,m/min$.

a) **Obtener** el área quemada en función del tiempo t transcurrido desde el comienzo del incendio **(1,3 puntos).**

b) **Calcular la velocidad de crecimiento** del área del círculo quemado en el instante en que el radio alcance $45\,m$ **(2 puntos).**

PROBLEMA 3.

a) **Obtener** la derivada de la función $f(x) = ax + b + sen\,x$ **(0,5 puntos)**. **Calcular** a y b si $O = (0, 0)$ es un punto de la curva $y = ax + b + sen\,x$, cuya recta tangente en $O = (0, 0)$ es el eje OX **(1,8 puntos).**

b) **Justificar que** la función $g(x) = -\frac{2}{\pi}x + sen\,x$ se anula en dos puntos del intervalo $[0, \pi]$ **(0,5 puntos).**

c) **Calcular** esos dos puntos **(0,5 puntos).**

PROBLEMA 4.

Dos postes de $3\,m$ y $4\,m$ se hallan clavados verticalmente en el suelo. Sus bases distan $5\,m$ y, en el segmento que las une, hay un punto P que dista x metros de la base del poste más bajo. El extremo superior de cada poste se une con P mediante un segmento rectilíneo de cable. Se pide:

a) **Obtener** la expresión *f(x)* de la longitud total de cable utilizado en ambos segmentos **(1,8 puntos).**

b) **Demostrar** que esa longitud total de cable es mínima cuando son iguales los valores absolutos de las pendientes de los dos segmentos considerados (**1 punto**). **Calcular** esa longitud mínima **(0,5 puntos).**

© Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Junio 2007:

Problema 3.1. Se consideran las funciones reales $f(x) = 12x^3 - 8x^2 + 9x - 5$ y $g(x) = 6x^2 - 7x + 2$. Se pide:

a) Determinar las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. *(1,6 puntos).*

b) Calcular la función $H(x) = \displaystyle\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$ que cumple $H(1) = 1$. *(1,7 puntos).*

Problema 3.2. Se considera la función real $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, donde *a, b* y *c* son parámetros reales.

a) Averiguar los valores de *a* y *b* para los que las rectas tangentes a la gráfica de *f*(*x*) en los puntos de abscisas $x = 2$ y $x = 4$ son paralelas al eje OX. *(2 puntos).*

b) Con los valores de *a* y *b* hallados anteriormente, obtener el valor de *c* para el que se cumple que el punto de inflexión de la gráfica de *f*(*x*) está en el eje OX. *(1,3 puntos).*

Problema 4.1. Unos altos hornos producen al día x toneladas de acero de baja calidad y $\dfrac{40 - 5x}{10 - x}$ toneladas de acero de alta calidad, siendo 8 toneladas la producción máxima diaria de acero de baja calidad. Si el precio de una tonelada de acero de baja calidad es 100 euros y el precio de una tonelada de acero de alta calidad es 250 euros, demostrar que se deben producir 5 toneladas por día de acero de baja calidad para que el valor de venta de la producción diaria sea máximo. *(3,3 puntos).*

Problema 4.2. Hallar las dimensiones del cartel de área máxima con forma de rectángulo que tiene dos vértices sujetos a una estructura rígida parabólica de ecuación $y = 12 - x^2$, y los otros dos vértices están situados sobre el eje OX. *(3,3 puntos).*

Septiembre 2007:

Problema 3.1. Dadas las funciones reales $f(x) = 4x^2 + 2x + 10$ y $g(x) = x^3 + x^2 + 5x + 5$. Se pide:

a) Determinar las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. *(1,6 puntos).*

b) Calcular la función $H(x) = \displaystyle\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$ que cumple $H(0) = 0$. *(1,7 puntos).*

Problema 3.2. Sea la función con dominio los números reales no nulos $f(x) = \dfrac{4}{x}$.

a) Calcular la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de *f*(*x*) en el punto de abscisa $x = 2$. *(1.8 puntos)*.

b) Determinar los puntos M y N de la gráfica de *f*(*x*) para los que las rectas tangentes a la gráfica en M y N se cortan en el punto $(4, -8)$. *(1.5 puntos).*

Problema 4.1. Se tienen dos programas informáticos *A* y *B*. Para procesar *n* datos, el programa *A* realiza un número de operaciones elementales no superior a $12 + n\sqrt[4]{n^3}$, mientras que el programa *B* ejecuta $n^2 - 2n + 10$ operaciones elementales. Comprobar que cuando el número *n* de datos es grande, el programa *A* procesa los *n* datos con menos operaciones elementales que el programa *B*. *(3,3 puntos)*.

Problema 4.2. El borde de un estanque está formado por el arco de curva $y = 4 - x^2$ de extremos $(-2,0)$ y $(2,0)$ y el segmento rectilíneo que une estos dos puntos. Un surtidor está situado en el punto de coordenadas $(0,2)$. Se pide:

a) Determinar, razonadamente, el punto del segmento rectilíneo del borde del estanque que está más próximo del surtidor. *(0,8 puntos).*

b) Determinar, razonadamente, los puntos del arco de curva del borde del estanque que están más próximos del surtidor. *(1,6 puntos).*

c) ¿Cuáles son los puntos del borde del estanque más próximos al surtidor? *(0,9 puntos).*

© Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Junio 2008:

Problema 3.1. Se considera, en el primer cuadrante, la región R del plano limitada por: el eje X, el eje Y, la recta $x = 2$ y la curva $y = \dfrac{1}{4 + x^2}$.

a) Calcular razonadamente el área de la región R. *(1,5 puntos).*

b) Encontrar el valor de α para que la recta $x = \alpha$ divida la región R en dos partes A (izquierda) y B (derecha) tales que el área de A sea el doble que la de B. *(1,8 puntos).*

Problema 3.2. Se considera la función real $f(x) = x^2 - 4$. Obtener, explicando el proceso de cálculo:

a) La gráfica de la curva $y = f(x)$. *(0,7 puntos).*

b) Los valores de x para los que está definida la función real $g(x) = \ln f(x)$. *(1,3 puntos).*

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $g(x)$, razonando si tiene, o no, máximo absoluto. *(1,3 puntos).*

Problema 4.1. Una empresa decide lanzar una campaña de propaganda de uno de sus productos editando un texto que ocupa 18 cm^2 en hojas rectangulares impresas a una cara, con márgenes superior e inferior de 2 cm y laterales de 1 cm. Se pide calcular, razonadamente, las dimensiones de la hoja para las que el consumo de papel sea mínimo. *(3,3 puntos).*

Problema 4.2. Una ventana tiene forma de trapecio rectangular. La base menor mide 20 cm y el lado oblicuo mide 40 cm. Hallar, razonadamente, el ángulo α que debe formar el lado oblicuo con la base mayor para que el área de la ventana sea máxima. *(2,8 puntos).* Calcular este área máxima. *(0,5 puntos).*

Nota: Un trapecio rectangular es un cuadrilátero con dos lados paralelos y en el que uno de los otros dos lados es perpendicular a estos dos lados paralelos.

Septiembre 2008:

Problema 3.1. Dada la función $f(t) = at + b$ (con a y b constantes reales), se define $F(x) = x \displaystyle\int_1^{x+1} f(t)dt$. Se pide obtener razonadamente:

a) La integral $\displaystyle\int_1^{x+1} f(t)dt$. *(1,5 puntos).*

b) La expresión de la derivada $F'(x)$ de la función $F(x)$. *(0,5 puntos).*

c) La relación entre los valores a y b para la que se verifica: $F''(0) = 0$. *(1,3 puntos).*

Problema 3.2. Para cada número real positivo α, se considera la función $g(x) = x^2 + \alpha$. Se pide calcular razonadamente:

a) El área de la región del plano limitada por el eje X, el eje Y, la recta $x = \sqrt{6}$ y la curva $y = g(x)$. *(2 puntos).*

b) El valor α para el que la curva $y = x^2 + \alpha$ divide al rectángulo de vértices (0,0), $(\sqrt{6}, 0)$, $(\sqrt{6}, 6 + \alpha)$, $(0, 6 + \alpha)$ en dos regiones de igual área. *(1,3 puntos).*

Problema 4.1. Un móvil se mueve con velocidad constante de 2 m/s, en el primer cuadrante, sobre la recta $x = 1$, partiendo del punto $M = (1, 0)$ situado a 1 m del origen. Se pide obtener razonadamente:

a) Las coordenadas del punto $M(t)$ donde está situado el móvil después de t segundos. *(1 punto).*

b) La función $m(t)$ igual a la pendiente de la recta que pasa por el punto $O = (0, 0)$ y por el punto $M(t)$. *(1,3 puntos).*

c) La derivada de la función $m(t)$. *(1 punto).*

Problema 4.2. En un terreno con forma de semicírculo de radio $\sqrt{50}$ metros, se dibuja un rectángulo que tiene dos vértices sobre la semicircunferencia del perímetro del terreno. Los otros dos vértices del rectángulo están sobre el segmento rectilíneo de dicho perímetro y distan x metros. Obtener razonadamente:

a) El área del rectángulo en función de x. *(1,3 puntos).*

b) El valor de x para el que es máxima el área del rectángulo. *(2 puntos).*

© Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Junio 2009:

Problema 3.1.

a) Determinar, razonadamente, el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=\dfrac{1}{(3-x)(3+x)}$. *(1 punto)*.

b) Obtener razonadamente los valores A y B tales que $\dfrac{1}{(3-x)(3+x)}=\dfrac{A}{3-x}+\dfrac{B}{3+x}$. *(1 punto)*.

c) Calcular razonadamente el área de la superficie S limitada por la curva $y=\dfrac{1}{(3-x)(3+x)}$, el eje OX y las rectas de ecuaciones $x=-2$ y $x=2$. *(1,3 puntos)*.

Problema 3.2. Dada la función real $f(x)=e^x-e^{-x}$, se pide calcular razonadamente:

a) La función $f(x)+f(-x)$. *(1,1 puntos)*.

b) La integral $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$, donde a es un número real positivo. *(1,1 puntos)*.

c) El punto de inflexión de $f(x)$. *(1,1 puntos)*.

Problema 4.1. Se desea construir una bodega con forma de paralelepípedo rectangular de 100 m^3 de volumen de manera que el largo de su base sea $\dfrac{4}{3}$ de la anchura x de su base. Se sabe que los precios de un metro cuadrado de suelo, de techo y de pared lateral son, respectivamente, 225 €/m^2, 300 €/m^2 y 256 €/m^2. Determinar razonadamente:

a) El valor x de la anchura de la base que minimiza el coste. *(2,3 puntos)*.

b) Dicho coste mínimo. *(1 punto)*.

Problema 4.2. Un proveedor vende un producto a un comerciante al precio de 300 euros la unidad. El comerciante incrementa la cantidad de 300 euros en un 40% para obtener el precio de venta al público. El comerciante sabe que a ese precio venderá 50 unidades cada mes y que durante el mes de rebajas por cada 3 euros de reducción en el precio de venta de la unidad conseguirá un incremento de ventas de 5 unidades. Se pide determinar, razonadamente, el número de unidades que debe pedir al proveedor para venderlas en el mes de rebajas y el precio de venta de cada unidad, para maximizar sus beneficios durante ese periodo. (*2 puntos por obtener el número de unidades y 1,3 puntos por el precio de venta*).

Septiembre 2009:

Problema 3.1. Se consideran las funciones reales $f(x)=2x^2+12x-6$ y $g(x)=(x-2)(x^2+9)$. Se pide obtener razonadamente:

a) Las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. *(1,6 puntos).*

b) La función $H(x)=\displaystyle\int\frac{f(x)}{g(x)}\,dx$ que cumple $H(3)=\dfrac{\pi}{3}$. *(1,7 puntos).*

Problema 3.2. Dada la función real $f(x)=\dfrac{8}{1+x^2}$, se pide calcular razonadamente:

a) Las derivadas primera y segunda de la función $f(x)$. *(0,8 puntos).*

b) Los puntos de inflexión de la curva $y=f(x)$. *(1 punto).*

c) La pendiente máxima de las rectas tangentes a la curva $y=f(x)$. *(1,5 puntos).*

Problema 4.1. A las 7 de la mañana, una lancha *A* está situada a 150 km al este de otra lancha *B*. La lancha *A* navega hacia el oeste a una velocidad constante de 40 km/h y la lancha *B* se dirige hacia el norte a 30 km/h. Si se mantienen estos rumbos, averiguar razonadamente a qué hora estarán ambas lanchas a distancia mínima. *(3,3 puntos).*

Problema 4.2. Una lámina metálica rectangular se dilata uniformemente por calentamiento, aumentando su base y su altura 0,2 mm por minuto. Averiguar la velocidad de crecimiento de la diagonal de dicha lámina cuando la base y la altura de la lámina miden, respectivamente, 8 y 6 cm. *(3,3 puntos).*

© Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Junio 2010:

Problema A.3. Se quiere construir un estadio vallado de 10000 metros cuadrados de superficie. El estadio está formado por un rectángulo de base x y dos semicírculos exteriores de diámetro x, de manera que cada lado horizontal del rectángulo es diámetro de uno de los semicírculos. El precio de un metro de valla para los lados verticales del rectángulo es de 1 euro y el precio de un metro de valla para las semicircunferencias es de 2 euros. Se pide obtener razonadamente:

a) La longitud del perímetro del campo en función de x. (*3 puntos*).

b) El coste $f(x)$ de la valla en función de x. (*3 puntos*).

c) El valor de x para el que el coste de la valla es mínimo. (*4 puntos*).

Problema B.3. Dada la función polinómica $f(x)=4-x^2$, se pide obtener razonadamente:

a) La gráfica de la curva $y=4-x^2$. (2 *puntos*).

b) El punto P de esa curva cuya tangente es perpendicular a la recta de ecuación $x+y=0$. (3 *puntos*).

c) Las rectas que pasan por el punto $(-2,1)$ y son tangentes a la curva $y=4-x^2$, obteniendo los puntos de tangencia. (5 *puntos*).

Septiembre 2010:

Problema A.3. Dadas las funciones $f(x)=x^3$ y $g(x)=2x^2-x$, se pide:

a) Obtener razonadamente los puntos de intersección A y B de las curvas $y=f(x)$ e $y=g(x)$. (*3 puntos*).

b) Demostrar que $f(x)\geq g(x)$ cuando $x\geq 0$. (*3 puntos*).

c) Calcular razonadamente el área de la superficie limitada por las dos curvas entre los puntos A y B. (*4 puntos*).

Problema B.3. Dos elementos de un escudo son una circunferencia y un triángulo. La circunferencia tiene centro (0,0) y radio 5. Uno de los vértices del triángulo es el punto $A=(-5,0)$. Los otros dos vértices del triángulo son los puntos de la circunferencia $B=(x,y)$ y $C=(x,-y)$. Se pide obtener razonadamente:

a) El área del triángulo en función de x. (*3 puntos*).

b) Los vértices B y C para los que es máxima el área del triángulo. (*5 puntos*).

c) El valor máximo del área del triángulo. (*2 puntos*).

Junio 2011:

Problema A.3. Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{x}{x^2-3x+2}$. Obtener **razonadamente**:

a) El dominio y las asíntotas de la función $f(x)$. (3 *puntos*).

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$. (4 *puntos*).

c) La integral $\int f(x)dx=\int\dfrac{x}{x^2-3x+2}dx$. (3 *puntos*).

Problema B.3. Se desea construir un campo rectangular con vértices A, B, C y D de manera que:
Los vértices A y B sean puntos del arco de la parábola $y=4-x^2$, $-2\leq x\leq 2$, y el segmento de extremos A y B es horizontal.
Los vértices C y D sean puntos del arco de la parábola $y=x^2-16$, $-4\leq x\leq 4$, y el segmento de extremos C y D es también horizontal.
Los puntos A y C deben tener la misma abscisa, cuyo valor es el número real positivo x.
Los puntos B y D deben tener la misma abscisa, cuyo valor es el número real negativo $-x$.
Se pide obtener **razonadamente**:

a) La expresión $S(x)$ del área del campo rectangular en función del número real positivo x. (*4 puntos*).

b) El número real positivo x para el que el área $S(x)$ es máxima. (*4 puntos*).

c) El valor del área máxima. (*2 puntos*).

© Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Septiembre 2011:

Problema A.3 Dada la función f definida por:

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

Obtener **razonadamente**:

a) El dominio y el recorrido de la función f. (*2 puntos*).

b) Los valores de x donde la función $f(x) = x^2 e^{-x}$ alcanza el máximo relativo y el mínimo relativo. (*2 puntos*).

c) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de dicha función f. (*2 puntos*).

d) Los valores de x donde la función $f(x) = x^2 e^{-x}$ tiene los puntos de inflexión. (*2 puntos*).

e) La gráfica de la curva $y = x^2 e^{-x}$, explicando con detalle la obtención de su asíntota horizontal. (*2 puntos*).

Problema B.3. Un coche recorre el arco de parábola Γ de ecuación $2y = 36 - x^2$, variando la x de -6 a 6. Se representa por $f(x)$ a la distancia del punto $(0, 9)$ al punto (x, y) del arco Γ donde está situado el coche. Se pide obtener **razonadamente**:

a) La expresión de $f(x)$. (*2 puntos*)

b) Los puntos del arco Γ donde la distancia $f(x)$ tiene mínimos relativos. (*2 puntos*).

c) Los valores máximo y mínimo de la distancia $f(x)$. (*2 punto*)

d) El área de la superficie limitada por el arco de parábola Γ y el segmento rectilíneo que une los puntos $(-6, 0)$ y $(6, 0)$. (*4 puntos*)

Junio 2012:

Problema A.3. Con el símbolo $\ln x$ se representa el logaritmo de un número positivo x cuando la base del logaritmo es el número e. Sea f la función que para un número positivo x está definida por la igualdad

$$f(x) = 4x \ln x .$$

Obtener **razonadamente**:

a) El valor de x donde la función f alcanza el mínimo relativo. (*4 puntos*).

b) La ecuación de la recta tangente a la curva $y = 4x \ln x$ en el punto $(1, 0)$. (*3 puntos*).

c) El área limitada entre las rectas $y = 0$, $x = e$ y $x = e^2$ y la curva $y = 4x \ln x$. (*3 puntos*).

Problema B.3. Para diseñar un escudo se dibuja un triángulo T de vértices $A = (0, 12)$, $B = (-x, x^2)$ y $C = (x, x^2)$, siendo $x^2 < 12$.

Obtener **razonadamente**:

a) El área del triángulo T en función de la abscisa x del vértice C. (*2 puntos*).

b) Las coordenadas de los vértices B y C para que el área del triángulo T sea máxima. (*3 puntos*).

Para completar el escudo se añade al triángulo T de área máxima la superficie S limitada entre la recta $y = 4$ y el arco de parábola $y = x^2$, cuando $-2 \le x \le 2$.

Obtener **razonadamente**:

c) El área de la superficie S. (*3 puntos*).

d) El área total del escudo. (*2 puntos*).

Septiembre 2012:

Problema A.3. Se definen las funciones f y g por $f(x) = -x^2 + 2x$ y $g(x) = x^2$.

Obtener **razonadamente**:

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de cada una de esas dos funciones. (*2 puntos*).

b) El máximo relativo de la función $f(x) = -x^2 + 2x$ y el mínimo relativo de $g(x) = x^2$. (*2 puntos*).

c) Los puntos de intersección de las curvas $y = -x^2 + 2x$ e $y = x^2$. (*2 puntos*).

d) El área encerrada entre las curvas $y = -x^2 + 2x$ e $y = x^2$, donde en ambas curvas la x varía entre 0 y 1. (*4 puntos*).

© Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Problema B.3. Se desea construir un depósito cilíndrico de 100 m^3 de capacidad, abierto por la parte superior. Su base es un círculo en posición horizontal de radio x y la pared vertical del depósito es una superficie cilíndrica perpendicular a su base.
El precio del material de la base del depósito es 4 euros/m^2.
El precio del material de la pared vertical es 2 euros/m^2.
Obtener **razonadamente**:

a) El área de la base en función de su radio x. (*1 punto*).
b) El área de la pared vertical del cilindro en función de x. (*2 puntos*).
c) La función $f(x)$ que da el coste del depósito. (*2 puntos*).
d) El valor x del radio de la base para el que el coste del depósito es mínimo y el valor de dicho coste mínimo. (*5 puntos*).

Junio 2013:

Problema A.3. Se estudió el movimiento de un meteorito del sistema solar durante un mes. Se obtuvo que la ecuación de su trayectoria T es $y^2 = 2x + 9$, siendo $-4{,}5 \le x \le 8$ e $y \ge 0$, estando situado el Sol en el punto $(0,0)$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La distancia del meteorito al Sol desde un punto P de su trayectoria cuya abscisa es x. (3 *puntos*).
b) El punto P de la trayectoria T donde el meteorito alcanza la distancia mínima al Sol. (5 *puntos*).
c) Distancia mínima del meteorito al Sol. (2 *puntos*).

Nota. En los tres resultados sólo se dará la expresión algebraica o el valor numérico obtenido, sin mencionar la unidad de medida por no haber sido indicada en el enunciado.

Problema B.3. Dada la función f definida por $f(x) = \text{sen } x$, para cualquier valor real x, se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = \pi/6$. (4 *puntos*).
b) La ecuación de la recta normal a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = \pi/3$. Se recuerda que la recta normal a una curva en un punto P es la recta que pasa por ese punto P y es perpendicular a la recta tangente a la curva en el punto P. (3 *puntos*).
c) El ángulo formado por las rectas determinadas en los apartados a) y b). (3 *puntos*).

Julio 2013:

Problema A.3. Se dan las funciones $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ y $g(x) = \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Las derivadas de $f(x)$ y $g(x)$. (4 *puntos*).
b) Los dominios de definición de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. (3 *puntos*).
c) La expresión simplificada de la función $f(x) + g(x)$, (1,5 *puntos*), y el recorrido de esta función $f(x) + g(x)$. (1,5 *puntos*).

Problema B.3. En el plano XY está dibujada una parcela A cuyos límites son dos calles de ecuaciones $x = 0$ y $x = 40$, respectivamente, una carretera de ecuación $y = 0$, y el tramo del curso de un río de ecuación

$$y = f(x) = 30\sqrt{2x+1}, \quad \text{con} \quad 0 \le x \le 40, \text{ siendo positivo el signo de la raíz cuadrada.}$$

Se pretende urbanizar un rectángulo R inscrito en la parcela A, de manera que los vértices de R sean los puntos $(x, 0)$, $(x, f(x))$, $(40, f(x))$ y $(40, 0)$.
Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El área de la parcela A. (3 *puntos*).
b) Los vértices del rectángulo R al que corresponde área máxima. (5 *puntos*).
c) El valor de dicha área máxima. (2 *puntos*).

Junio 2014:

Problema A.3. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El valor de m para el cual la función $f(x) = \begin{cases} m(x+1)e^{2x}, & x \le 0 \\ \dfrac{(x+1)\,\text{sen}\,x}{x}, & x > 0 \end{cases}$ es continua en $x = 0$. (3 *puntos*).
b) Los intervalos de crecimiento o decrecimiento de la función $(x+1)e^{2x}$. (3 *puntos*).
c) La integral $\int (x+1)e^{2x}dx$, (2 *puntos*) y el área limitada por la curva $y = (x+1)e^{2x}$ y las rectas $x = 0$, $x = 1$ e $y = 0$. (2 *puntos*).

© Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Problema B.3. Se tiene un cuadrado de mármol de lado 80 cm. Se produce la rotura de una esquina y queda un pentágono de vértices $A=(0,\ 20)$, $B=(20,\ 0)$, $C=(80,\ 0)$, $D=(80,\ 80)$ y $E=(0,\ 80)$. Para obtener una pieza rectangular se elige un punto $P=(x,\ y)$ del segmento AB y se hacen dos cortes paralelos a los ejes X e Y. Así se obtiene un rectángulo R cuyos vértices son los puntos $P=(x,\ y)$, $F=(80,\ y)$, $D=(80,\ 80)$ y $G=(x,\ 80)$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El área del rectángulo R en función de x, cuando $0\le x\le 20$. (3 *puntos*).
b) El valor de x para el que el área del rectángulo R es máxima. (5 *puntos*).
c) El valor del área máxima del rectángulo R. (2 *puntos*).

Julio 2014:

Problema A.3. Sea f la función real definida por $f(x)=xe^x-3x$.

Se pide la obtención **razonada**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**, de:

a) Los puntos de corte de la curva $y=f(x)$ con el eje X. (2 *puntos*).
b) El punto de inflexión de la curva $y=f(x)$, (2 *puntos*), así como la **justificación razonada** de que la función f es creciente cuando $x>2$. (2 *puntos*).
c) El área limitada por el eje X y la curva $y=f(x)$, cuando $0\le x\le \ln 3$, donde ln significa logaritmo neperiano. (4 *puntos*).

Problema B.3. Un club deportivo alquila un avión de 80 plazas para realizar un viaje a la empresa VR. Hay 60 miembros del club que han reservado su billete. En el contrato de alquiler se indica que el precio de un billete será 800 euros si sólo viajan 60 personas, pero que el precio por billete disminuye en 10 euros por cada viajero adicional a partir de esos 60 viajeros que ya han reservado el billete.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El total que cobra la empresa VR si viajan 61, 70 y 80 pasajeros. (1 *punto*).
b) El total que cobra la empresa VR si viajan $60+x$ pasajeros, siendo $0\le x\le 20$. (4 *puntos*).
c) El número de pasajeros entre 60 y 80 que maximiza lo que cobra en total la empresa VR. (5 *puntos*).

Junio 2015:

Problema A.3. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función real f definida por $f(x)=(x-1)(x-3)$, siendo x un número real. (3 *puntos*)
b) El área del recinto acotado limitado entre las curvas $y=(x-1)(x-3)$ e $y=-(x-1)(x-3)$. (4 *puntos*)
c) El valor positivo de a para el cual el área limitada entre la curva $y=a(x-1)(x-3)$, el eje Y y el segmento que une los puntos $(0,\ 0)$ y $(1,\ 0)$ es 4/3. (3 *puntos*)

Problema B.3. Un pueblo está situado en el punto $A(0,\ 4)$ de un sistema de referencia cartesiano. El tramo de un río situado en el término municipal del pueblo describe la curva $y=\dfrac{x^2}{4}$, siendo $-6\le x\le 6$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La distancia entre un punto $P(x,\ y)$ del río y el pueblo en función de la abscisa x de P. (2 *puntos*)
b) El punto o puntos del tramo del río situados a distancia mínima del pueblo. (4 *puntos*)
c) El punto o puntos del tramo del río situados a distancia máxima del pueblo. (4 *puntos*)

Julio 2015:

Problema A.3. Se da la función f definida por $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El dominio y las asíntotas de la función f. (3 *puntos*)
b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f. (4 *puntos*)
c) La integral $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$. (3 *puntos*)

© Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Problema B.3. Se va a construir un depósito de 1500 m^3 de capacidad, con forma de caja abierta por la parte superior. Su base es pues un cuadrado y las paredes laterales son cuatro rectángulos iguales perpendiculares a la base. El precio de cada m^2 de la base es de 15 € y el precio de cada m^2 de pared lateral es de 5 €.
Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El coste total del depósito en función de la longitud x de un lado de su base. (3 *puntos*)
b) Las longitudes del lado de la base y de la altura del depósito para que dicho coste total sea mínimo. (5 *puntos*)
c) El valor del mínimo coste total del depósito. (2 *puntos*)

Junio 2016:

Problema A.3. Se da la función f definida por $f(x)=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Dominio y asíntotas de la función f. (2 *puntos*)
b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f. (3 *puntos*)
c) La integral $\int f(x)\,dx$. (3 *puntos*)
d) El valor de $a>4$ para el que el área de la superficie limitada por la curva $y=f(x)$ y las rectas $y=0,\quad x=4\quad y\quad x=a$ es $\ln(3/2)$. (2 *puntos*)

Problema B.3. Cada día, una planta productora de acero vende x toneladas de acero de baja calidad e y toneladas de acero de alta calidad. Por restricciones del sistema de producción debe suceder que $y=\dfrac{23-5x}{10-x}$, siendo $0<x<\dfrac{23}{5}$.

El precio de una tonelada de acero de alta calidad es de 900 euros y el precio de una tonelada de acero de baja calidad es de 300 euros.
Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los ingresos obtenidos en un día en función de x. (3 *puntos*)
b) Cuántas toneladas de cada tipo de acero se deben vender en un día para que los ingresos obtenidos ese día sean máximos. (5 *puntos*)
d) El ingreso máximo que se puede obtener por las ventas de acero en un día. (2 *puntos*)

Julio 2016:

Problema A.3. Se da la función f definida por $f(x)=x^2+|x|$, donde x es un número real cualquiera y $|x|$ representa al valor absoluto de x. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El punto o puntos donde la gráfica de la función f corta a los ejes de coordenadas. (2 *puntos*)
b) La justificación de que la curva $y=f(x)$ es simétrica respecto al eje de ordenadas. (1 *puntos*)
c) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f, (2 *puntos*)
y el extremo relativo de la función f, justificando si es máximo o mínimo relativo. (1 *puntos*)
d) La representación gráfica de dicha curva $y=f(x)$. (1 *puntos*)
e) Las integrales definidas $\int_{-1}^{0} f(x)dx$ y $\int_{0}^{2} f(x)dx$. (1,5 + 1,5 *puntos*)

Problema B.3. La diferencia de potencial x entre dos puntos de un circuito eléctrico provoca el paso de una corriente eléctrica de intensidad y, que está relacionada con la diferencia de potencial x por la ecuación $y=-x^2-x+6$, siendo $0\le x\le 2$.
Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La gráfica de la función $f(x)=-x^2-x+6$ (3 *puntos*)
y deducir, gráfica o analíticamente, el valor de la intensidad y cuando la diferencia de potencial x es 0 y el valor de la diferencia de potencial x al que corresponde una intensidad y igual a 0, siendo $0\le x\le 2$. (1 *punto*)
b) El valor de la diferencia de potencial x para el que es máximo el producto $y\cdot x$ de la intensidad y por la diferencia de potencial x, cuando $0\le x\le 2$, (2 *puntos*)
y obtener el valor máximo de dicho producto $y\cdot x$, cuando $0\le x\le 2$. (1 *punto*)
c) El área de la superficie situada en el primer cuadrante limitada por la curva $y=f(x)$, el eje de abscisas y el eje de ordenadas. (3 *puntos*)

© Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Junio 2017:

Problema A.3. Se desea unir un punto M situado en un lado de una calle, de 6 m. de anchura, con el punto N situado en el otro lado de la calle, 18 m. más abajo, mediante dos cables rectos, uno desde M hasta un punto P, situado al otro lado de la calle, y otro desde el punto P hasta el punto N. Se representó la calle en un sistema cartesiano y resultó que $M=(0,\ 6)$, $P=(x,\ 0)$ y $N=(18,\ 0)$. El cable MP tiene que ser más grueso debido a que cruza la calle sin apoyos intermedios, siendo su precio de 10 €/m. El precio del cable PN es de 5 €/m.
Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El costo total C de los dos cables en función de la abscisa x del punto P, cuando $0\le x\le 18$. (3 *puntos*)
b) El valor de x, con $0\le x\le 18$, para el que el costo total C es mínimo. (4 *puntos*)
c) El valor de dicho costo total mínimo. (3 *puntos*)

Problema B.3. Dada la función f definida por $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$, para cualquier valor real $x\neq 0$, se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f, (2 *puntos*)
y los extremos relativos de la función f. (1 *punto*)
b) Las asíntotas de la curva $y=f(x)$. (3 *puntos*)
c) El área de la región plana limitada por la curva $y=\dfrac{x^2+1}{x}$, $1\le x\le e$,
el segmento que une los puntos $(1,\ 0)$ y $(e,\ 0)$, y las rectas $x=1$ y $x=e$. (4 *puntos*)

Julio 2017:

Problema A.3. Se consideran las curvas $y=x^3$, $y=ax$ y la función $f(x)=x^3-ax$, siendo a un parámetro real y $a>0$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los puntos de corte de la curva $y=f(x)$ con los ejes de coordenadas y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f. (1+2 *puntos*)
b) La gráfica de la función f cuando $a=9$. (3 *puntos*)
c) Calcular, en función del parámetro a, el área de la región acotada del primer cuadrante encerrada entre las curvas $y=x^3$ e $y=ax$, cuando $a>1$. (2 *puntos*)
d) El valor del parámetro a para el que el área obtenida en el apartado c) coincide con el área de la región acotada comprendida entre la curva $y=x^3$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=2$. (2 *puntos*)

Problema B.3. Se considera el triángulo T de vértices $O=(0,\ 0)$, $A=(x,\ y)$ y $B=(0,\ y)$, siendo $x>0$, $y>0$, y tal que la suma de las longitudes de los lados OA y AB es 30 metros.
Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El área del triángulo T en función de x. (3 *puntos*)
b) El valor de x para el que dicha área es máxima. (5 *puntos*)
c) El valor de dicha área máxima. (2 *puntos*)

Junio 2018:

Problema A.3. Dada la función $f(x)=\frac{1}{x^2-x}$ se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El dominio y las asíntotas de la función $f(x)$ (2 *puntos*).
b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x)$ (4 *puntos*).
c) El área limitada por la curva $y=f(x)$, el eje de abcisas y las rectas $x=2$ y $x=3$ (4 *puntos*).

© Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Problema B.3. Se divide un alambre de longitud 100 cm en dos partes. Con una de ellas, de longitud x, se construye un triángulo equilátero y con la otra, de longitud $100 - x$, se construye un cuadrado. Se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La función de la variable x que expresa la suma de las áreas del triángulo equilátero y del cuadrado, siendo $0 \leq x \leq 100$ (4 *puntos*).
b) El valor de la variable x en el intervalo $[0,100]$ para el cual dicha función (suma de las àreas en función de x obtenida en el apartado a)) alcanza su mínimo valor (3 *puntos*).
c) El valor de la variable x en el intervalo $[0,100]$ para el cual dicha función alcanza su máximo valor. Interpretar el resultado obtenido (3 *puntos*).

Julio 2018:

Problema A.3 Consideramos la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx\cos(\pi x)$, que depende de los parámetros a, b, c. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

a) La relación entre los coeficientes a, b, c sabiendo que $f(x)$ toma el valor 22 cuando $x = 1$ (2 puntos).
b) La relación que deben verificar los coeficientes a, b y c para que sea horizontal la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P de dicha curva, sabiendo que la abscisa del punto P es $x = 1$. (4 puntos).
c) $\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx$ (4 puntos).

Problema B.3. Dentro de una cartulina rectangular se desea hacer un dibujo que ocupe un rectángulo R de $600\ cm^2$ de área de manera que:
Por encima y por debajo de R deben quedar unos márgenes de 3 cm de altura cada uno. Los márgenes a izquierda y a derecha de R deben tener una anchura de 2 cm cada uno.
Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El área de la cartulina en función de la base x del rectángulo R (3 puntos).
b) El valor de x para el cual el área de la cartulina es mínima (5 puntos).
c) Las dimensiones de dicha cartulina de área mínima (2 puntos).

Junio 2019:

Problema A.3. Se considera la función $f(x) = xe^{-x^2}$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:
a) Las asíntotas, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. (3 *puntos*)
b) La representación gráfica de la curva $y = f(x)$. (2 *puntos*)
c) El valor del parámetro a para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[0,1]$ a la función $g(x) = f(x) + ax$. (1 *punto*)
d) El valor de las integrales indefinidas $\int f(x)\,dx$, $\int xe^{-x}\,dx$. (4 *puntos*)

Problema B.3. Las coordenadas iniciales de los móviles A y B son (0, 0) y (250, 0), respectivamente, siendo 1km la distancia del origen de coordenadas a cada uno de los puntos (1, 0) y (0, 1).
El móvil A se desplaza sobre el eje OY desde su posición inicial hasta el punto $\left(0, \frac{375}{2}\right)$ con velocidad de 30 km/h y, simultáneamente, el móvil B se desplaza sobre el eje OX desde su posición inicial hasta el origen de coordenadas con velocidad de 40 km/h.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:
a) La distancia $f(t)$ entre los móviles A y B durante el desplazamiento, en función del tiempo t en horas desde que comenzaron a desplazarse. (2 *puntos*)
b) El tiempo T que tardan los móviles en desplazarse desde su posición inicial a su posición final, y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f a lo largo del trayecto. (4 *puntos*)
c) Los valores de t para los que la distancia de los móviles es máxima y mínima durante su desplazamiento y dichas distancias máxima y mínima. (4 *puntos*)

© Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Julio 2019:

Problema A.3. Se da la función real h definida por $h(x) = \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El dominio de la función h. Los límites $\lim_{x\to+\infty} h(x)$ y $\lim_{x\to 0} h(x)$. (1 + 2 *puntos*)

b) La asíntota de la curva $y = h(x)$. (2 *puntos*)

c) La primitiva de la función h (es decir, $\int h(x)dx$) y el área de la superficie encerrada entre las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = 5$ y la curva $y = h(x)$. (3 + 2 *puntos*)

Problema B.3. Un proyectil está unido al punto $(0, 2)$ por una cuerda elástica y tensa. El proyectil recorre la curva $y = 4 - x^2$ de extremos $(-2,0)$ y $(2,0)$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La función de la variable x que expresa la distancia entre un punto cualquiera $(x, 4 - x^2)$ de la curva $y = 4 - x^2$ y el punto $(0, 2)$. (2 *puntos*)

b) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a mayor distancia absoluta del punto $(0,2)$ para $-2 \le x \le 2$. (2 *puntos*)

c) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a menor distancia absoluta del punto $(0, 2)$ para $-2 \le x \le 2$. (2 *puntos*)

d) El área de la superficie por la que se ha movido la cuerda elástica, es decir, el área comprendida entre las curvas $y = 4 - x^2$ e $y = 2 - |x|$ cuando $-2 \le x \le 2$. (4 *puntos*)

Julio 2020:

Problema 3. Se da la función real f definida por $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El dominio y las asíntotas de la función f. (3 *puntos*)

b) La integral $\int f(x)dx$, así como la primitiva de f(x) cuya gráfica pasa por el punto (2, 0). (3+1 *puntos*)

c) El área de la región limitada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0, x = 2, x = 4$. (3 *puntos*)

Problema 6. En un triángulo isósceles, los dos lados iguales miden 10 centímetros cada uno.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La expresión del área $A(x)$ del triángulo, en función de la longitud x del tercer lado. (4 *puntos*)

b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $A(x)$, $0 \le x \le 20$. (4 *puntos*)

c) La longitud x del tercer lado para que el área del triángulo sea máxima y el valor de esta área. (2 *puntos*)

Septiembre 2020:

Problema 3. Dada la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, **obtener razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El dominio de definición y las asíntotas de la función f. (3 *puntos*)

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la representación gráfica de la función. (3 +1 *puntos*)

c) El valor de $\int_2^3 f(x)dx$. (3 *puntos*)

Problema 6. Los vértices de un triángulo son $A(0,12)$, $B(-5,0)$ y $C(5,0)$. Se desea construir un rectángulo inscrito en el triángulo anterior, de lados paralelos a los ejes coordenados y dos de cuyos vértices tienen coordenadas $(-x, 0)$, $(x, 0)$, siendo $0 \le x \le 5$. Los otros dos vértices están situados en los segmentos AB y AC.

Obtener razonadamente, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La expresión $f(x)$ del área del rectángulo anterior. (4 *puntos*)

b) El valor de x para el cual dicha área es máxima y las dimensiones del rectángulo obtenido. (3 *puntos*)

c) La proporción entre el área del rectángulo anterior y el área del triángulo. (3 *puntos*)

© Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

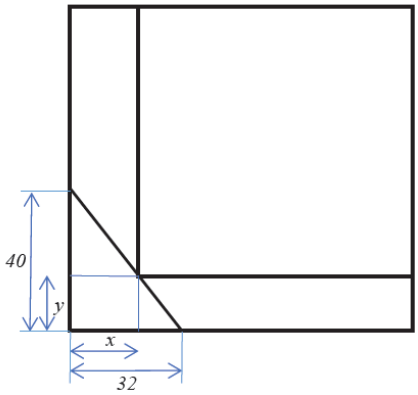
Junio 2021:

Problema 3. Consideramos la función $f(x) = \frac{x-1}{x(x+2)}$. Obtened:

a) El dominio y las asíntotas de la función. (2 puntos)
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. (4 puntos)
c) La integral $\int f(x)dx$. (4 puntos)

Problema 6. Un espejo plano, cuadrado, de 80 cm de lado, se ha roto por una esquina siguiendo una línea recta. El trozo desprendido tiene forma de triángulo rectángulo de catetos 32 cm y 40 cm respectivamente. En el espejo roto recortamos una pieza rectangular R, uno de cuyos vértices es el punto (x, y) (véase la figura).

a) Hallad el área de la pieza rectangular obtenida como función de x, cuando $0 \leq x \leq 32$. (4 puntos)
b) Calculad las dimensiones que tendrá R para que su área sea máxima. (4 puntos)
c) Calculad el valor de dicha área máxima. (2 puntos)



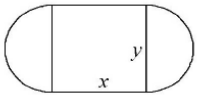
Julio 2021:

Problema 3. Dada la función $f(x) = xe^{1-x^2}$, calculad:

a) El dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos. (4 puntos)
b) Las asíntotas y la gráfica de f. (3 puntos)
c) La integral $\int f(x)dx$. (3 puntos)

Problema 6. Queremos diseñar un campo de juego de modo que la parte central sea rectangular, y las partes laterales sean semicircunferencias hacia fuera. La superficie del campo mide $(4 + \pi)$ metros cuadrados. Se quieren pintar todas las rayas de dicho campo tal y como se observa en la figura. Se pide:

a) Escribid la longitud total de las rayas del campo en función de la altura y del rectángulo. (5 puntos)
b) Calculad las dimensiones del campo para que la pintura usada sea mínima. (5 puntos)



Junio 2022:

Problema 5. Consideramos la función $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4}$. Obtener:

a) El dominio y los puntos de corte con los ejes. (1 punto)
b) Las asíntotas de la función. (2 puntos)
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos. (3 puntos)
d) La primitiva de la función $f(x)$. (4 puntos)

Problema 6. Se desea construir un cuadrado y un triángulo equilátero cortando en dos partes un cable de acero de 240 m. de longitud.

a) Calcular la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado en función del valor x que corresponde con los metros que mide un lado del triángulo. (3 puntos)
b) Calcular la longitud de cable necesaria para construir el triángulo de modo que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado sea mínima y calcular el área mínima. (7 puntos)

© Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Julio 2022:

Problema 5.

a) Calcular, indicando todos los pasos, la siguiente integral indefinida: (5 puntos)

$$\int \frac{18}{x^2 - 5x - 14}\,dx.$$

b) Determinar, en función de t, el valor $\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14}\,dx$. (2 puntos)

c) Determinar el valor de t mayor que 8 para que $\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14}\,dx$ sea igual a $\ln\frac{25}{4}$. (3 puntos)

Problema 6. Considerar la función $f(x) = e^{-x^2}$ para los valores positivos de x. Por cada punto $M = (x, f(x))$ de la gráfica de f se trazan dos rectas paralelas a los ejes de coordenadas, OX y OY. Estas dos rectas, junto con los ejes de coordenadas, definen un rectángulo.

a) Determinar el área del rectángulo en función de x. (3 puntos)

b) Encontrar el punto M que proporciona mayor área y calcular esta área. (7 puntos)

Junio 2023:

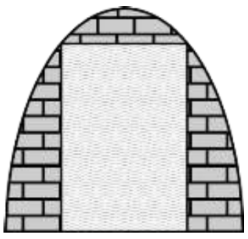
Problema 5. Considerar la función $f(x) = \frac{1}{x} + ln(x+1)$. Obtener:

a) El dominio y las asíntotas de $f(x)$. (2 puntos)

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos. (4 puntos)

c) El área comprendida entre la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0, x = 1$ y $x = 2$. (4 puntos)

Problema 6. El corte vertical de la entrada a la plaza amurallada de cierto pueblo tiene forma de parábola con ecuación $y = -x^2 + 12$, donde x e y se miden en metros e $y = 0$ representa el suelo. Se desea poner una puerta rectangular de modo que las dos esquinas superiores estén en la parábola y las inferiores en el suelo. El resto de la entrada va cerrado con piedra. Calcular:

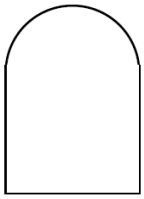


a) Las dimensiones de la puerta para que tenga la mayor superficie posible. (6 puntos)

b) Utilizando la puerta del apartado anterior, obtener el área de la parte frontal de la puerta y el área de la parte frontal de la entrada recubierta por piedra. (4 puntos)

Julio 2023:

Problema 6. Una ventana rectangular está coronada por un semicírculo tal y como se indica en la siguiente figura.



Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 20 metros:

a) Calcular el área de la ventana en función de su anchura x. (3 puntos)

b) Calcular las dimensiones que ha de tener la ventana para que permita la máxima entrada de luz. (5 puntos)

c) Calcular el valor de dicha área máxima. (2 puntos)

© Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com

Problema 5. Consideramos la función $f(x) = \frac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2}$.

a) Comprobar que $x = -\frac{1}{2}$ es una discontinuidad evitable. (2 puntos)
b) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (4 puntos)
c) Obtener $\int f(x)\,dx$. (4 puntos)

Junio 2024:

Problema 5. Sea la función $f(x) = \frac{kx}{e^{2x}}$ donde k es un parámetro real. Se pide:

a) Obtener el dominio y las asíntotas de $f(x)$. (3 puntos)
b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos. (5 puntos)
c) Justificar que la función siempre se anula en algún punto del intervalo [-1, 1]. (2 puntos)

Problema 6. Sea el rectángulo R definido por los puntos del plano $(-1,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(-1,1)$. Se consideran las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = a, 0 < a < 1$, contenidas dentro de R. Obtener el valor de a que cumple que el área comprendida entre dichas gráficas y las rectas verticales x=-1 y x=+1 es igual a un tercio del área de R. (10 puntos)

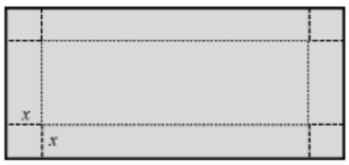
Julio 2024:

Problema 5. Se considera la función $h(x) = ax + x^2$, donde a es un parámetro real. Se pide:

a) El valor de a que hace que la gráfica de la función $y = h(x)$ tenga un mínimo relativo en la abscisa $x = -\frac{3}{4}$. (3 puntos)
b) Para el valor a del apartado anterior, dibuja las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$. (2 puntos)
c) Calcula el área del plano comprendida entre ambas curvas. (5 puntos)

Problema 6. Se construye una caja de cartón sin tapa a partir de una hoja rectangular de 16 cm por 10 cm. Esto se hace recortando un cuadrado de longitud x en cada esquina, doblando la hoja y levantando los cuatro laterales de la caja. Calcular:

a) Las dimensiones de la caja para que tenga el mayor volumen posible. (8 puntos)
b) Dicho volumen. (2 puntos)



© Juan Bertomeu Ferrer
www.bertoblog.com