Junio 2001:

PROBLEMA 3. Con la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ resuelver $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$.

Obtén razonadamente la matriz inversa de una matriz **A**, cuadrada y de orden 3, sabiendo que $\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} = \mathbf{I}$, donde $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

PROBLEMA 2. Calcular el vector $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que verifique $\mathbf{AX} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$, siendo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Septiembre 2001:

PROBLEMA 4. Probar que para un valor real de m el sistema $\begin{matrix} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 4 \\ 3x + 5y + mz = 9 \end{matrix}$ es indeterminado. Para ese valor de m encontrar todas las soluciones del sistema. Interpretar geométricamente el significado del sistema.

PROBLEMA 1. Dado el sistema $\begin{matrix} x + y + z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \\ 3x + 5y + mz = 8 \end{matrix}$ obtener para qué valores reales de m tiene una única solución y calcularla para cada uno de esos valores de m.

Junio 2002:

PROBLEMA 1. Para cada terna de números reales (x,y,z), se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & x & 1 \\ 1 & y & -1 \\ 2 & z & -1 \end{pmatrix}.$$

i) Calcular los determinantes de las matrices A y B. (1 punto).
ii) Para $x=y=z=1$, calcular el determinante de la matriz producto $A\,B$. (0,3 puntos).
iii) Obtener, razonadamente, para qué valores de x, y, z, ninguna de las matrices A y B tiene inversa. (2 puntos).

PROBLEMA 1. Para cada número real λ, $M(\lambda)$ es la matriz $M(\lambda) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda & -1 \end{pmatrix}$. Se pide:

i) Obtener el determinante de la matriz $M(\lambda)$, y justificar que para cualquier número real λ existe la matriz $M(\lambda)^{-1}$ inversa de $M(\lambda)$. (1,3 puntos).
ii) Calcular la matriz $M(0)^{-1}$ (1 punto).
iii) Si $A= M(8)$, $B= M(4)$ y $C=M(3)$, calcúlese, razonadamente, el determinante de la matriz producto $A\,B^{-1}\,C^{-1}$. (1 punto).

Septiembre 2002:

PROBLEMA 1. Dadas las matrices reales:

$$A=\begin{pmatrix}5&8\\9&4\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-3&2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\\1&4\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}3&7\\1&2\end{pmatrix},$$

se pide

i) Calcular la matriz $M=A-2BC$. (1 punto).

ii) Justificar que existe la matriz D^{-1} inversa de D y calcular tal matriz. (0,9 puntos).

iii) Calcular las matrices X, Y que cumplen $D\,X=M=Y\,D$. (1,4 puntos).

PROBLEMA 1. Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases}x+y+z=\lambda\\2x+3y+5z=2\\3x+5y+\lambda^2 z=1\end{cases}$, dependiente del parámetro λ,

se pide:

i) Determinar para qué valores de λ el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible. (1, 3 puntos).

ii) Obtener el conjunto S de las soluciones del sistema para el caso compatible indeterminado. (1 punto).

iii) Obtener el vector de S ortogonal (perpendicular) al vector (1,1,2). (1 punto).

Junio 2003:

PROBLEMA 1. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases}\lambda x+2z=0\\\lambda y-z=\lambda\\x+3y+z=5\end{cases}$, dependiente del parámetro real λ,

se pide:

a) Determinar para qué valores de λ el sistema es: compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible (*1,3 puntos*).

b) Obtener las soluciones en los casos compatible determinado y compatible indeterminado (*2 puntos*).

PROBLEMA 1. a) Calcular las matrices reales cuadradas de orden 3, X e Y, que satisfacen las ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases}2X+Y=B\\X-2Y=C\end{cases}\quad \text{donde}\quad B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad C=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$ (*1,8 puntos*).

b) Si X e Y son las matrices anteriores, calcular la matriz $(2X+Y)X-(2X+Y)(2Y)$ (*1,5 puntos*).

Septiembre 2003:

PROBLEMA 1 Considerar las matrices: $A=\begin{pmatrix}0&m&3\\1&0&-1\\5&1&-(m+1)\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

a) ¿Para qué valores reales de m es A inversible? Calcular la matriz A^{-1} *(2 puntos).*

b) En la anterior matriz A con $m=0$, obtener la matriz real cuadrada X de orden 3 que satisface la igualdad $B-AX=AB$ (*1,3 puntos*).

PROBLEMA 1

Tenim les matrius quadrades reals d'ordre 2, $P=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$ i $Q=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$. Calculeu:

a) La matriu P^{-1} (1,1 punts). b) La matriu real quadrada X d'ordre 2, tal que $P^{-1}XP=Q$ (1,1 punts). c) La matriu $(PQP^{-1})^2$ (1,1 punts).

Junio 2004:

PROBLEMA 1. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x-y+z=\lambda \\ \lambda x+2y-z=3\lambda \\ 2x+\lambda y-2z=6 \end{cases}$, con λ parámetro real, se pide:

a) Determinar razonadamente para qué valores de λ es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible (*1,3 puntos*).

b) Hallar el conjunto de las soluciones del sistema para el caso compatible determinado (*1 punto*).

c) Hallar el conjunto de las soluciones del sistema para el caso compatible indeterminado (*1 punto*).

PROBLEMA 1. Determinar el valor real de x para el que se cumple la siguiente propiedad: el determinante de la matriz 2B es 160, siendo $B=\begin{pmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{pmatrix}$ (*3,3 puntos*).

Septiembre 2004:

PROBLEMA 1. Obtener todos los valores reales x, y, z, t para los que se verifica $AX = XA$, siendo $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ y $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (*3,3 puntos*).

PROBLEMA 1. Para las matrices reales: $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Justificar que existe la matriz A^{-1}, inversa de A, y calcular el determinante de A^{-1} (*1,2 puntos*).

b) Calcular la matriz $B=A(A+4I)$ (*0,7 puntos*).

c) Determinar los números reales x, y, z, t que cumplen: $A^{-1}=xA+yI,\ A^2=zA+tI$ (*1,4 puntos*).

Junio 2005:

PROBLEMA 1. Calculeu els valors $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$ que satisfan les equacions següents:
$\begin{cases} 2AX-3AY=B \\ AX-AY=C \end{cases}$, on $X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -17 & -30 \\ 10 & 18 \end{pmatrix}$
(*3,3 punts*).

PROBLEMA 1. El sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+\alpha y+\alpha^2 z=1 \\ x+\alpha y+\alpha z=\alpha \\ x+\alpha^2 y+\alpha^2 z=\alpha^2 \end{cases}$ depende del parámetro real α.

Discutir para qué valores de α es incompatible, compatible determinado y compatible indeterminado (*2 puntos*), y resolverlo en los casos compatibles (*1,3 puntos*).

Septiembre 2005:

PROBLEMA 1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $E=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, calcular razonadamente la matriz $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que satisface la ecuación $(AB'+C)X=(A'D)E$, donde M' significa la matriz transpuesta de la matriz M (*3,3 puntos*).

PROBLEMA 1. En el mercado podemos encontrar tres alimentos preparados para gatos que se fabrican poniendo, por kilo, las siguientes cantidades de carne, pescado y verdura:

- Alimento *Migato*: 600 g de carne, 300 g de pescado y 100 g de verdura.
- Alimento *Catomeal*: 300 g de carne, 400 g de pescado y 300 g de verdura.
- Alimento *Comecat*: 200 g de carne, 600 g de pescado y 200 g de verdura.

Si queremos ofrecer a nuestro gato 470 g de carne, 370 g de pescado y 160 g de verdura por kilo de alimento, ¿qué porcentaje de cada uno de los compuestos anteriores hemos de mezclar para obtener la proporción deseada? (*3,3 puntos*).

Junio 2006:

PROBLEMA 1. Dado el sistema de ecuaciones con incógnitas x, y, z, $\left\{\begin{array}{l} x+2y-3z=\alpha \\ 2x+6y-11z=2 \\ x-2y+7z=1 \end{array}\right\}$ se pide:

a) **Determinar razonadamente** el valor de α para el cual el sistema es compatible **(1,2 puntos).**
b) Para ese valor obtenido en **a)** de α, **calcular** el conjunto de soluciones del sistema **(1,3 puntos).**
c) **Explicar** la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las tres ecuaciones del sistema, en función de los valores de α **(0,8 puntos).**

PROBLEMA 1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ y $T=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) **Probar** que la matriz T tiene matriz inversa, T^{-1}, y **calcular** dicha matriz inversa T^{-1} **(1,3 puntos).**
b) Dada la ecuación con matriz incógnita B, $A=T^{-1}BT$, **calcular** el determinante de B **(0,8 puntos).**
c) **Obtener** los elementos de la matriz B considerada en el apartado **b) (1,2 puntos).**

Septiembre 2006:

PROBLEMA 1. Dado el sistema de ecuaciones con un parámetro real λ e incógnitas x, y, z, $\left\{\begin{array}{l} (\lambda+2)x-y+z=0 \\ 3x+(\lambda+6)y-3z=0 \\ 5x+5y+(\lambda-2)z=0 \end{array}\right\}$ se pide:

a) Calcular para qué valores de λ el sistema sólo admite la solución $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ **(1 punto).**
b) Para cada valor de λ que hace indeterminado el sistema, **obtener** todas sus soluciones **(1,8 puntos).**
c) Explicar la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las ecuaciones del sistema cuando $\lambda=-3$ **(0,5 puntos).**

PROBLEMA 1. A es una matriz 3×3 tal que $A^2=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) **Calcular** el determinante de la matriz A^3 **(0,5 puntos)** y la matriz inversa de A^3 **(1 punto).**
b) **Calcular** la matriz fila $X=(x, y, z)$ que es solución de la ecuación matricial $XA^3=BA^2$, donde B es la matriz fila $B=(1, 2, 3)$ **(1,3 puntos).**
c) **Calcular** la matriz inversa de A **(0,5 puntos).**

Junio 2007:

Problema 1.1. Dadas las matrices $B(x)=\begin{pmatrix} x+2 & 4 & 6 \\ 2x+3 & 3 & 6 \\ 4x+4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ y $C(y)=\begin{pmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$:

a) Calcular el determinante de la matriz $3B(x)$ y obtener el valor de x para el que dicho determinante vale 162. *(1,8 puntos).*
b) Demostrar que la matriz $C(y)$ no tiene inversa para ningún valor real de y. *(1,5 puntos).*

Problema 1.2. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{array}{l} x+\alpha y+z=9 \\ 3x+5y+z=9 \\ \alpha x+y+z=9 \end{array}\right\}$, se pide:

a) Probar que es siempre compatible, obteniendo los valores de α para los que es indeterminado. *(2 puntos).*
b) Resolver el sistema anterior para $\alpha=7$. *(1,3 puntos).*

Septiembre 2007:

Problema 1.1. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 6x+3y+2z=5 \\ 3x+4y+6z=3 \\ x+3y+2z=\alpha \end{cases}$, se pide:

a) Justificar que para cualquier valor del parámetro real α, el sistema tiene solución única. *(1 punto).*
b) Hallar la solución del sistema en función del parámetro α. (*1.3 puntos*).
c) Determinar el valor de α para el que la solución (x,y,z) del sistema satisface $x+y+z=1$. (*1 punto*).

Problema 1.2. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, se pide:

a) Obtener razonadamente todos los valores de α para los que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es la única solución de la ecuación matricial $AX=\alpha X$. *(1,5 puntos).*
b) Resolver la ecuación matricial $AX=2X$. *(1,8 puntos).*

Junio 2008:

Problema 1.1. Dado el sistema dependiente del parámetro real α

$$\begin{cases} \alpha x+y+z=1 \\ x+\alpha y+z=1 \\ x+y+\alpha z=1 \end{cases}, \quad \text{se pide:}$$

a) Determinar, razonadamente, los valores de α para los que el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible. (*1,3 puntos*).
b) Resolver el sistema cuando es compatible determinado. (*1,3 puntos*).
c) Obtener, razonadamente, la solución del sistema cuando $\alpha=0$. (*0,7 puntos*).

Problema 1.2. Sean I y A las matrices cuadradas siguientes: $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}$. Se pide calcular, escribiendo explícitamente las operaciones necesarias:

a) Las matrices A^2 y A^3. (*1,5 puntos*).
b) Los números reales α y β para los que se verifica $(I+A)^3=\alpha I+\beta A$. (*1,8 puntos*).

Septiembre 2008:

Problema 1.1. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y el vector $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, se pide obtener razonadamente:

a) El vector X tal que $AX=0X$. *(1,1 puntos).*
b) Todos los vectores X tales que $AX=3X$. *(1,1 puntos).*
c) Todos los vectores X tales que $AX=2X$. *(1,1 puntos).*

Problema 1.2. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y+z=\alpha+3 \\ 2x-y+z=\alpha+1 \\ 3x+\alpha y+2z=4 \end{cases}$, se pide:

a) Probar que es compatible para todo valor de α. *(1,3 puntos).*
b) Obtener razonadamente el valor α para el que el sistema es indeterminado. *(1 punto).*
c) Resolver el sistema cuando $\alpha=0$, escribiendo los cálculos necesarios para ello. *(1 punto).*

Junio 2009:

Problema 1.1. Dadas las matrices cuadradas $A=\begin{pmatrix}3&6&0\\0&3&2\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}18&48&12\\0&18&12\\0&0&6\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, se pide:

a) Justificar que la matriz A tiene inversa y obtener razonadamente la matriz inversa A^{-1}, incluyendo en la respuesta todos los pasos que llevan a la obtención de A^{-1}. (*1,1 puntos*).

b) Calcular, razonadamente, el determinante de la matriz $3\,A^{-1}$, incluyendo en la respuesta todos los pasos realizados. (*1,1 puntos*).

c) Obtener razonadamente los valores reales *x, y, z* que verifican la ecuación $xI+yA+zA^2=B$. (*1,1 puntos*).

Problema 1.2. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases}(\alpha+3)x-4y-2z=4\\ x-2y-(\alpha+2)z=2\\ 2x+(\alpha-3)y-2z=4\end{cases}$$

se pide, razonando las respuestas:

a) Justificar que para el valor $\alpha=0$ el sistema es incompatible. (*1,1 puntos*).

b) Determinar los valores del parámetro α para los que el sistema es compatible y determinado. (*1,1 puntos*).

c) Resolver el sistema para el valor del parámetro α para el cual es compatible indeterminado. (*1,1 puntos*).

Septiembre 2009:

Problema 1.1. Dada la matriz $A(\alpha)=\begin{pmatrix}1&2&\alpha-2\\4&3&2\\\alpha&\alpha&-6\end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular, en función de α, el determinante de la matriz $A(\alpha)$, escribiendo los cálculos necesarios. (*1,3 puntos*).

b) Determinar, razonadamente, los números reales α para los que el determinante de la matriz inversa de $A(\alpha)$ es igual a 1/66. (*2 puntos*).

Problema 1.2. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases}x+y+z=0\\2x+3y+4z=0\\5x+7y+\alpha z=0\end{cases}$, se pide:

a) Deducir, razonadamente, para qué valores de α el sistema sólo admite la solución $(x,y,z)=(0,0,0)$. (*1,5 puntos*).

b) Resolver, razonadamente, el sistema para el valor de α que lo hace indeterminado. (*1,8 puntos*).

Junio 2010:

Problema A.1. Dadas las matrices cuadradas

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&2\\-3&-3&-2\end{pmatrix},$$

se pide:

a) Calcular las matrices $(A-I)^2$ y $A(A-2I)$. (*4 puntos*).

b) Justificar razonadamente que

b.1) Existen las matrices inversas de las matrices A y $A-2I$. (*2 puntos*).

b.2) No existe matriz inversa de la matriz $A-I$. (*2 puntos*).

c) Determinar el valor del parámetro real λ para el que se verifica $A^{-1}=\lambda(A-2I)$. (*2 puntos*).

Problema B.1. Dado el sistema de ecuaciones lineales que depende de los parámetros a, b y c

$$\begin{cases} 2ax+by+z &= 3c \\ 3x-2by-2cz &= a \\ 5ax-2y+cz &= -4b \end{cases},$$

se pide:

a) Justificar razonadamente que para los valores de los parámetros $a=0$, $b=-1$ y $c=2$ el sistema es incompatible. (*3 puntos*).

b) Determinar razonadamente los valores de los parámetros a, b y c, para los que se verifica que $(x,y,z)=(1,2,3)$ es solución del sistema. (*4 puntos*).

c) Justificar si la solución $(x,y,z)=(1,2,3)$ del sistema del apartado b) es, o no, única. (*3 puntos*).

Septiembre 2010:

Problema A.1.

Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} \alpha x+\alpha^3 y+z=1 \\ \alpha x+\alpha y+z =1 \\ \alpha^3 x+\alpha y+z =1 \end{cases}$ donde α es un parámetro real, se pide:

a) Deducir, razonadamente, para qué valores de α es compatible determinado. (*4 puntos*).
b) Deducir, razonadamente, para qué valores de α es compatible indeterminado. (*3 puntos*).
c) Resolver el sistema en todos los casos en que es compatible indeterminado. (*3 puntos*).

Problema B.1. Dadas las matrices $A(x)=\begin{pmatrix} x+2 & 4 & 3 \\ x+2 & 6 & 2 \\ x+3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ y $B(y)=\begin{pmatrix} y+1 & 4 & 3 \\ y+2 & 6 & 2 \\ y+3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Obtener razonadamente el valor de x para que el determinante de la matriz $A(x)$ sea 6. *(4 puntos).*
b) Calcular razonadamente el determinante de la matriz $2A(x)$. *(2 puntos).*
c) Demostrar que la matriz $B(y)$ no tiene matriz inversa para ningún valor real de y. *(4 puntos).*

Junio 2011:

Problema A.1. Sea el sistema de ecuaciones

$$S:\begin{cases} x+y+z=m \\ 2x+3z=2m+1 \\ x+3y+(m-2)z=m-1 \end{cases},$$

donde m es un parámetro real. Obtener **razonadamente**:

a) Todas las soluciones del sistema S cuando $m=2$. (*4 puntos*).

b) Todos los valores de m para los que el sistema S tiene una solución única. (*2 puntos*).

c) El valor de m para el que el sistema S admite la solución $(x,y,z)=\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},0\right)$. (*4 puntos*).

Problema B.1. Se da la matriz $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2-1 \end{pmatrix}$, donde m es un parámetro real.

a) Obtener **razonadamente** el rango o característica de la matriz A en función de los valores de m. (*5 puntos*).

b) **Explicar** por qué es invertible la matriz A cuando $m=1$. (*2 puntos*).

c) Obtener **razonadamente** la matriz inversa A^{-1} de A cuando $m=1$, indicando los distintos pasos para la obtención de A^{-1}. **Comprobar** que los productos AA^{-1} y $A^{-1}A$ dan la matriz unidad. (*3 puntos*).

Septiembre 2011:

Problema A.1. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y M, donde M es una matriz de dos filas y dos columnas que verifica $M^2=M$. Obtener **razonadamente**:

a) Todos los valores reales k para los que la matriz $B=A-kI$ tiene inversa. (*2 puntos*).

b) La matriz inversa B^{-1} cuando $k=3$. (*2 puntos*).

c) Las constantes reales α y β para las que se verifica que $\alpha A^2+\beta A=-2I$. (*4 puntos*).

d) Comprobar **razonadamente** que la matriz $P=I-M$ cumple las relaciones:

$$P^2=P \qquad \text{y} \qquad MP=PM.$$

(*2 puntos, repartidos en 1 punto por cada igualdad*).

Problema B.1. Se dan las matrices $M=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$ y T, y se sabe que T es una matriz cuadrada de 3 filas y 3 columnas cuyo determinante vale $\sqrt{2}$.

Calcular **razonadamente** los determinantes de las siguientes matrices, indicando explícitamente las propiedades utilizadas en su cálculo:

a) $\frac{1}{2}T$. (*3 puntos*).

b) M^4. (*3 puntos*).

c) TM^3T^{-1}. (*4 puntos*).

Junio 2012:

Problema A.1. Se da el sistema de ecuaciones $S:\begin{cases}2x+\alpha^2 z=5\\ x+(1-\alpha)y+z=1\\ x+2y+\alpha^2 z=1\end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener **razonadamente**:

a) La solución del sistema S cuando $\alpha=0$. (*3 puntos*).

b) Todas las soluciones del sistema S cuando $\alpha=-1$. (*4 puntos*).

c) El valor de α para el que el sistema S es incompatible. (*3 puntos*).

Problema B.1. Obtener **razonadamente:**

a) Todas las soluciones $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ de la ecuación $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ -1\end{pmatrix}$. (*4 puntos*).

b) El determinante de una matriz cuadrada B de dos filas, que tiene matriz inversa y que verifica la ecuación $B^2=B$. (*3 puntos*).

c) El determinante de una matriz cuadrada A que tiene cuatro filas y que verifica la ecuación:

$$A^2-9\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

sabiendo además que el determinante de A es positivo. (*3 puntos*).

Septiembre 2012:

Problema A.1. Sea el sistema de ecuaciones $S:\begin{cases}x-2y-3z=0\\ 3x+10y-z=0\\ x+14y+\alpha z=0\end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener **razonadamente**:

a) La solución del sistema S cuando $\alpha=0$. (*4 puntos*).

b) El valor de α para el que el sistema S tiene infinitas soluciones. (*4 puntos*).

c) Todas las soluciones del sistema S cuando se da a α el valor obtenido en el apartado b). (*2 puntos*).

Problema B.1. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y B, donde B es una matriz de dos filas y dos columnas que no tiene ningún elemento nulo y que verifica la relación $B^2=-7B+U$.

Obtener **razonadamente**:

a) Los números reales a y b tales que $A^2=aA+bU$. (*4 puntos*).

b) Los números reales p y q tales que $B^{-1}=pB+qU$ (*2 puntos*), **justificando** que la matriz B tiene inversa (*2 puntos*).

c) Obtener los valores x e y para los que se verifica que $B^3=xB+yU$. (*2 puntos*).

Junio 2013:

Problema A.1. Se tiene el sistema de ecuaciones $\begin{cases}2x+5y=a\\ -x-4y=b\\ 2x+y=c\end{cases}$, donde a, b y c son tres números reales. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La relación que deben verificar los números a, b y c para que el sistema sea compatible. (4 *puntos*).

b) La solución del sistema cuando $a=-1$, $b=2$ y $c=3$. (2 *puntos*).

c) La solución del sistema cuando los números a, b y c verifican la relación $a=c=-2b$. (4 *puntos*).

Problema B.1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 4 & 2 & -2\end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, obtener **razonadamente** el valor de los determinantes siguientes, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) $|A+B|$ y $\left|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right|$. (4 *puntos*).

b) $\left|(A+B)^{-1}A\right|$ y $\left|A^{-1}(A+B)\right|$. (3 *puntos*).

c) $\left|2ABA^{-1}\right|$ y $\left|A^3B^{-1}\right|$. (3 *puntos*).

Julio 2013:

Problema A.1. Comprobar **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado** que:

a) Si el producto de dos matrices cuadradas A y B es conmutativo, es decir que $AB=BA$, entonces se deduce que $A^2B^2=(AB)^2$. (2 *puntos*).

b) Que la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 10\\ 0 & -3 & 7\end{pmatrix}$ satisface la relación $A^2-3A+2I=O$, siendo I y O, respectivamente, las matrices de orden 3×3 unidad y nula, (4 *puntos*), y que una matriz A tal que $A^2-3A+2I=O$ tiene matriz inversa. (2 *puntos*)

c) Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**, los valores α y β tales que $A^3=\alpha A+\beta I$, sabiendo que la matriz A verifica la igualdad $A^2-3A+2I=O$. (2 *puntos*).

Problema B.1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases}\alpha x + y + z = 1\\ x + \alpha y + z = 1,\\ 3x + 5y + z = 1\end{cases}$ donde α es un parámetro real.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Todas las soluciones del sistema cuando $\alpha=7$. (4 *puntos*).

b) Los valores de α para los que el sistema es compatible indeterminado. (3 *puntos*).

c) Los valores de α para los cuales el sistema es compatible determinado. (3 *puntos*).

Junio 2014:

Problema A.1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+3y+2z &= -1 \\ 2x+4y+5z &= k-2 \\ x+k^2y+3z &= 2k \end{cases}$, donde k es un parámetro real se pide:

a) Discutir **razonadamente** el sistema según los valores de k. (4 *puntos*).
b) Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**, todas las soluciones del sistema cuando $k=-1$. (3 *puntos*).
c) Resolver **razonadamente** el sistema cuando $k=0$. (3 *puntos*).

Problema B.1. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La matriz inversa A^{-1} de la matriz A. (3 *puntos*).
b) La matriz X que es solución de la ecuación $AX=BC$. (4 *puntos*).
c) El determinante de la matriz $2M^3$, siendo M una matriz cuadrada de orden 2 cuyo determinante vale $\frac{1}{2}$. (3 *puntos*).

Julio 2014:

Problema A.1. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El valor del determinante de la matriz $S=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, (2 *puntos*) y la matriz S^{-1}, que es la matriz inversa de la matriz S. (2 *puntos*). Indicar la relación entre que el valor del determinante de una matriz S sea o no nulo y la propiedad de que esta matriz admita matriz inversa S^{-1}. (1 *punto*).
b) El determinante de la matriz $\left(4\left(T^2\right)\right)^{-1}$, sabiendo que T es una matriz cuadrada de 3 filas y que 20 es el valor del determinante de dicha matriz T. (3 *puntos*).
c) La solución a de la ecuación $\begin{vmatrix} a & a^2-1 & -3 \\ a+1 & 2 & a^2+4 \\ -3 & 4a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a+1 & -3 \\ a^2-1 & 2 & 4a \\ -3 & a^2+4 & 1 \end{vmatrix}$. (2 *puntos*).

Problema B.1. Se tiene el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} (1-\alpha)x+2y+\ \ z &= 4 \\ x+y-\ \ 2z &= -4 \\ x+4y-(\alpha+1)z &= -2\alpha \end{cases}$ donde α es un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores del parámetro α para los que el sistema es incompatible. (3 *puntos*).
b) Los valores del parámetro α para los que el sistema es compatible y determinado. (3 *puntos*).
c) Todas las soluciones del sistema cuando $\alpha=2$. (4 *puntos*).

Junio 2015:

Problema A.1. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La matriz inversa de la matriz A. (2 *puntos*)
b) Las matrices X e Y de orden 2×2 tales que $XA=B$ y $AY=B$. (2 + 2 *puntos*)
c) **Justificar razonadamente** que si M es una matriz cuadrada tal que $M^2=I$, donde I es la matriz identidad del mismo orden que M, entonces se verifica la igualdad $M^3=M^7$. (4 *puntos*)

Problema B.1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases}(1-\alpha)x & + & (2\alpha+1)y & + & (2\alpha+2)z & = & \alpha \\ \alpha x & + & \alpha y & & & = & 2\alpha+2 \\ 2x & + & (\alpha+1)y & + & (\alpha-1)z & = & \alpha^2-2\alpha+9\end{cases}$,

donde α es un parámetro real. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Todas las soluciones del sistema cuando $\alpha = 1$. (3 *puntos*)

b) **La justificación razonada** de si el sistema es compatible o incompatible cuando $\alpha = 2$. (3 *puntos*)

c) Los valores de α para los que el sistema es compatible y determinado. (4 *puntos*)

Julio 2015:

Problema A.1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases}x & + & 3y & + & z & = & \alpha \\ x & + & y & - & \alpha z & = & 1 \\ 2x & + & \alpha y & - & z & = & 2\alpha+3\end{cases}$, donde α es un parámetro real. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La solución del sistema cuando $\alpha = -1$. (3 *puntos*)

b) Todas las soluciones del sistema cuando $\alpha = 0$. (3 *puntos*)

c) El valor de α para el que el sistema es incompatible. (4 *puntos*)

Problema B.1. Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de x para los cuales la matriz B tiene inversa. (3 puntos)

b) El valor del determinante de las matrices A^3 y $\begin{pmatrix} 2x & 5 & -1 \\ 2y & 10 & 3 \\ 2z & 5 & 0 \end{pmatrix}$, sabiendo que el valor del determinante de la matriz A es 8. (4 puntos)

c) Los valores de x, y, z para los cuales $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. (3 puntos)

Junio 2016:

Problema A.1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases}ax & & & - & z & = & a \\ 2x & + & ay & + & z & = & 1 \\ 2x & & & + & z & = & 2\end{cases}$, donde a es un parámetro real.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es incompatible. (4 *puntos*)

b) Todas las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado. (3 *puntos*)

c) La solución del sistema cuando $a = -1$. (3 *puntos*)

Problema B.1. Se da la matriz $A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La comprobación de que $A^{-1} = 5^{-1}A^t$, siendo A^t la matriz traspuesta de A. (4 *puntos*)

b) Los valores del parámetro real λ para los cuales $A - \lambda I$ no es invertible, siendo I la matriz identidad de orden 3. (3 *puntos*)

c) El determinante de una matriz cuadrada B cuyo determinante es mayor que 0 y verifica la ecuación $B^{-1} = B^t$. (3 *puntos*)

Julio 2016:

Problema A.1. Se da el sistema $\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ -3x + 2y + 3z = -2 \\ 2x + \alpha y - 5z = -4 \end{cases}$, donde α es un parámetro real. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La solución del sistema cuando $\alpha = 0$. (3 *puntos*)
b) El valor del parámetro α para el que el sistema es incompatible. (3 *puntos*)
c) Los valores del parámetro α para los que el sistema es compatible y determinado (2 *puntos*)
y obtener la solución del sistema en función del parámetro α. (2 *puntos*)

Problema B.1. Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El determinante de las matrices $A \cdot (2(B)^2)$ (1,5 *puntos*)
y $A \cdot (2(B)^2) \cdot (3A)^{-1}$. (1,5 *puntos*)
b) Las matrices A^{-1} (2 *puntos*)
y $((B \cdot A)^{-1} \cdot B)^{-1}$. (2 *puntos*)
c) La solución de la ecuación matricial $A \cdot X + B \cdot X = 3I$. (3 *puntos*)

Junio 2017:

Problema A.1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} -x + ay + 2z = a \\ 2x + ay - z = 2 \\ ax - y + 2z = a \end{cases}$, dependiente del parámetro real a.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La solución del sistema cuando $a = 2$. (3 *puntos*)
b) Los valores del parámetro a para los que el sistema es compatible y determinado. (3 *puntos*)
c) El valor del parámetro a para el que el sistema es compatible e indeterminado
y obtener todas las soluciones del sistema para ese valor de a. (2+2 *puntos*)

Problema B.1. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La comprobación de que $C^2 = 2C - I$, siendo $C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3×3, (2,5 *puntos*)
y el cálculo de la matriz C^4. (2,5 *puntos*)
b) El valor del determinante de la matriz $(3A^4)(4A^2)^{-1}$, sabiendo que A es una matriz cuadrada de cuatro columnas cuyo determinante vale -1. (3 *puntos*)
c) La matriz B que admite inversa y que verifica la igualdad $BB = B$. (2 *puntos*)

Julio 2017:

OPCIÓN A

Problema A.1. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 tales que $A^2 = -A - I$ y $2B^3 = B$, siendo $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La justificación de que la matriz A es invertible (2 *puntos*)
y el cálculo de la matriz A^3 en función de A y de I. (2 *puntos*)
b) Los valores posibles del determinante de B. (3 *puntos*)
c) El valor del determinante de la matriz B^2, sabiendo que la matriz B tiene inversa. (3 *puntos*)

Problema B.1. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La justificación de que A tiene matriz inversa y el cálculo de dicha inversa A^{-1}. (2+2 *puntos*)
b) La justificación de que $A^4=I$. (2 *puntos*)
c) El cálculo de las matrices A^7, A^{30} *y* A^{100}. (4 *puntos*)

Junio 2018:

Problema A.1. Se tiene el sistema de ecuaciones $\begin{cases} y - z = 1-a \\ -x + z = 5 \\ -ax + y - z = 1\end{cases}$, donde a es un parámetro real. Se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es compatible determinado (2 *puntos*).
b) Las soluciones del sistema cuando $a=3$ (4 *puntos*).
c) Las soluciones del sistema para los valores de a que lo hacen compatible indeterminado (4 *puntos*).

Problema B.1. Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2+2A=3I$, donde I es la matriz identidad. Calcular **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de a y b para los cuales $A^{-1}=aA+bI$ (3 *puntos*).
b) Los valores de α y β para los cuales $A^4=\alpha A+\beta I$ (4 *puntos*).
c) El determinante de la matriz $2B^{-1}$, sabiendo que B es una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinante es 2 (3 *puntos*).

Julio 2018:

Problema A.1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y = 1 \\ (a-1)y + z = 0 \\ x + ay + (a-1)z = a\end{cases}$, donde a es un parámetro real, se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es compatible (5 *puntos*).
b) Las soluciones del sistema cuando $a=1$ (3 *puntos*).
c) La solución del sistema cuando $a=0$ (2 *puntos*).

Problema B.1. Resolver los siguientes apartados, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Dadas A y B, matrices cuadradas del mismo orden tales que $AB=A$ y $BA=B$, deducir que $A^2=A$ y $B^2=B$ (4 *puntos*).
b) Dada la matriz $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, se pide encontrar los parámetros a, b para que la matriz $B=\begin{bmatrix}a&0\\1&b\end{bmatrix}$ cumpla que $B^2=B$ pero $AB\neq A$ y $BA\neq B$ (2 *puntos*).
c) Sabiendo que $\begin{vmatrix}x&1&0\\y&2&1\\z&3&2\end{vmatrix}=3$, obtener razonadamente el valor de los determinantes $\begin{vmatrix}2x&1&0\\2y&2&1\\2z&3&2\end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix}x+1&1&0\\y+3&2&1\\z+5&3&2\end{vmatrix}$ (4 *puntos*).

Junio 2019:

Problema A.1. Se dan la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ -2 & a+1 & 2\\ -3 & a-1 & a\end{pmatrix}$, que depende del parámetro real a, y una matriz cuadrada B de orden 3 tal que $B^2=\frac{1}{3}I-2B$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El rango de la matriz A en función del parámetro a y el determinante de la matriz $2A^{-1}$ cuando $a=1$. (2+2 *puntos*)

b) Todas las soluciones del sistema de ecuaciones $A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$ cuando $a=-1$. (3 *puntos*)

c) La comprobación de que B es invertible, encontrando m y n tales que $B^{-1}=mB+nI$. (3 *puntos*)

Problema B.1. Se da el sistema $\begin{cases}x+y+z=4\\ 3x+4y+5z=5\\ 7x+9y+11z=\alpha\end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de α para los que el sistema es compatible y los valores de α para los que el sistema es incompatible. (4 *puntos*)

b) Todas las soluciones del sistema cuando sea compatible. (4 *puntos*)

c) La discusión de la compatibilidad y determinación del nuevo sistema deducido del anterior al cambiar el coeficiente 11 por cualquier otro número diferente. (2 *puntos*)

Julio 2019:

Problema A.1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases}2x \quad +3z=\alpha\\ x-2y+2z=5\\ 3x-y+5z=\alpha+1\end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de α para los que el sistema es compatible y determinado. (4 *puntos*)

b) La solución del sistema cuando $\alpha=-1$. (3 *puntos*)

c) El valor de α para que el sistema tenga una solución (x,y,z) que verifique $x+y+z=0$. (3 *puntos*)

Problema B.1. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & 6\end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de α para los que la ecuación matricial $AX=\alpha X$ solo admite una solución. (4 *puntos*)

b) Todas las soluciones de la ecuación matricial $AX=5X$. (3 *puntos*)

c) Comprobar que $X=\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación matricial $AX=2X$ y, sin calcular la matriz A^{100}, obtener el valor β tal que $A^{100}\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}$. (3 *puntos*)

Julio 2020 :

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases}x+y+az=1\\ x+ay+z=1\\ ax+y+z=-2\end{cases}$, siendo a un parámetro real,

obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El estudio del sistema en función del parámetro a. (5 *puntos*)

b) Las soluciones del sistema cuando $a=-2$. (3 *puntos*)

c) La solución del sistema cuando $a=0$. (2 *puntos*)

Problema 4. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ b & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ -1 & b & -1\end{pmatrix}$, que dependen del parámetro real b.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de b para que cada una de las matrices AB y BA tenga inversa. (3 *puntos*)

b) Los valores de b para que la matriz A^TA tenga inversa, siendo A^T la matriz traspuesta de A. (3 *puntos*)

c) La inversa de A^TA, cuando dicha inversa exista. (4 *puntos*)

Septiembre 2020:

Problema 1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+ay+2z &= 3 \\ x-3y+az &= -2 \\ x+y+2z &= a \end{cases}$, donde a es un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de a para los cuales el sistema es compatible. (4 *puntos*)
b) La solución del sistema cuando $a=0$. (3 *puntos*)
c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado. (3 *puntos*)

Problema 4. Sea $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La justificación de que A tiene inversa y el cálculo de dicha matriz inversa. (3 *puntos*)
b) Dos constantes a, b de modo que $A^{-1}= A^2+aA+bI$. Se puede usar (sin comprobarlo) que A verifica la ecuación $A^3-3A^2+3A-I=0$ siendo I la matriz identidad. (3 *puntos*)
c) El valor de λ para que el sistema de ecuaciones $(A-\lambda I)\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ tenga infinitas soluciones. Para dicho valor de λ hallar todas las soluciones del sistema. (2+2 *puntos*)

Junio 2021:

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones:

$$x+y+(a+1)z=2$$
$$x+(a-1)y+2z=1$$
$$2x+ay+z=-1$$

a) Estudiadlo en función de los valores del parámetro real a. (5 puntos)
b) Encontrad todas las soluciones del sistema cuando éste sea compatible. (5 puntos)

Problema 4. Dada la matriz $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & m \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2+1 \end{bmatrix}$, se pide:

a) Obtened el rango de la matriz en función del parámetro m. (4 puntos)
b) Explicad cuándo la matriz A es invertible. (2 puntos)
c) Resolved la ecuación $XA=I$ donde I es la matriz identidad en el caso m=1. (4 puntos)

Julio 2021:

Problema 1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x-y+z &= m \\ x+y+3z &= 0 \\ 5x-4y+mz &= m \end{cases}$, donde m es un parámetro real. Se pide:

a) La discusión del sistema de ecuaciones en función del parámetro m. (4 puntos)
b) La solución del sistema cuando $m=1$. (3 puntos)
c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado. (3 puntos)

Problema 4. Se dan las matrices $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & a^2-2 & 3 \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Obtened

a) El rango de la matriz A según los valores del parámetro a. (3 puntos)
b) Una matriz C tal que $AC=16\,I$, siendo I la matriz identidad, cuando $a=0$. (4 puntos)
c) El rango de la matriz B y la discusión de si el sistema $B\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ tiene solución. (3 puntos)

Junio 2022:

Problema 1. Dadas las matrices $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$. Se pide:

a) Demostrar que $C-AB^T$ tiene inversa y calcularla. (4 puntos)
b) Calcular la matriz X que verifica $CX=AB^TX+I$, donde I es la matriz identidad. (3 puntos)
c) Justificar que $(AB^T)^n=2^nI$ para todo número natural n. (3 puntos)

Problema 2. Dada la matriz

$$A=\begin{bmatrix}m & 0 & m-1\\ -2m & m^2 & 1\\ 0 & 2m & 1\end{bmatrix}.$$

Determinar:
a) El rango de la matriz A en función del parámetro real m. (4 puntos)
b) La matriz inversa de A en el caso $m=2$. (4 puntos)
c) El número real m para el cual el determinante de la matriz $2A$ es igual a -8. (2 puntos)

Julio 2022:

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax+y=1\\ x+z=1\\ x+ay+(a-1)z=a\end{cases}.$$

a) Discutir el sistema en función del parámetro real a. (5 puntos)
b) Encontrar todas las soluciones del sistema cuando este sea compatible. (5 puntos)

Problema 2. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}a+b & 1\\ 0 & a-b\end{pmatrix}$:
a) Calcular los valores de los parámetros a y b para que se cumpla $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. (4 puntos)
b) Para los valores a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular A^3 y A^4. (3 puntos)
c) Calcular $\det(A^{-50})$ cuando $a^2-b^2\neq 0$. (3 puntos)

Junio 2023:

Problema 1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & m & 1\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}m\\ 0\\ 9\end{pmatrix}$:

a) Estudiar cuándo la ecuación matricial $A^2X=B$ tiene solución en función del parámetro real m. (4 puntos)
b) Encontrar todas las soluciones de la ecuación anterior cuando éstas existan. (6 puntos)

Problema 2. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ -\alpha^2 & 0\end{pmatrix}$:

a) Obtener la matriz $(AB^T+I)^{-1}$, donde I es la matriz identidad de las dimensiones adecuadas para realizar la operación. (6 puntos)
b) Comprobar que $C^2=-\alpha^3I$, donde I es la matriz identidad, y calcular C^{13}. (4 puntos)

Julio 2023:

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{pmatrix}2 & a+1 & 1\\ 1 & a & 2\\ 1 & 1 & a+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real:

a) Discutir el sistema en función del parámetro a. (6 puntos)
b) Obtener las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado. (4 puntos)

Problema 2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtener:

a) La matriz $M = (A - \alpha I)^2$, donde α es un parámetro real. (6 puntos)
b) El valor de α, si existe, para el cual la matriz M es la matriz nula. (4 puntos)

Junio 2024:

Problema 1. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales que depende de un parámetro real m:

$$\begin{aligned} -x + y + z &= m \\ 2x + m\,y - z &= 3\,m \\ (m-1)x + 3y - z &= 6 + m. \end{aligned}$$

Se pide:

a) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro m. (6 puntos)
b) Para los valores de m para los que el sistema es compatible indeterminado, encontrar la solución. (4 puntos)

Problema 2. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Estudiar el rango de A en función del parámetro real m. (3 puntos)
b) Para $m = -1$, resolver la ecuación matricial $AX = B$. (4 puntos)
c) Para $m = 0$, calcular A^5. (3 puntos)

Julio 2024:

Problema 1. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & k & 3 \\ k & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ donde k es un número real.

a) ¿Para qué valores del parámetro k la matriz A es invertible? (2 puntos)
b) Para $k = 0$, si existe, calcular la matriz inversa de A. (4 puntos)
c) Para $k = 0$, hallar las matrices diagonales D que verifican $AD = DA$. (4 puntos)

Problema 2. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Estudiar los valores del parámetro real a para los que la ecuación matricial $A^2X = B$ tiene una única solución. (5 puntos)
b) Sabiendo que el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación $A^2X = B$, encontrar el valor de α, β y γ dependiendo del parámetro real a. (5 puntos)